Devoir maison 1

Exercice 1 :

Soit $x \in]0,1[$

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ Calculer S_n et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $T_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$
   (a) Exprimer $(1-x)T_n$ En déduire la limite de T_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Retrouver ce résultat avec une autre méthode.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}*$, on pose $a_n = \dfrac{n-1}{n^3+1}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

1. Montrer que l'on a pour $n \geqslant 2, 0 < a_n < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$
2. En déduire que (A_n) est convergente. On notera A sa limite que l'on ne demande pas de calculer.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}*, 0 \leqslant A - A_n \leqslant \dfrac{1}{n}$
4. A partir de quelle valeur de n peut-on affirmer que A_n est une valeur approchée de A à 10^{-4} près ?
5. Pour accélérer la convergence, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - b_n$
   (a) Calculer b_n en fonction de n et vérifier que : $\forall n \geqslant 2, 0 < b_n < \dfrac{6}{n^5} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \dfrac{6}{t^5} dt$
   (b) On pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$.
   A l'aide des égalités $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$ exprimer B_n en fonction de n et A_n (lorsque $n \geqslant 2$). En déduire que (B_n) converge.
   (c) Soit B la limite de (B_n). Montrer que $0 \leqslant B - B_n \leqslant \dfrac{3}{2n^4}$
   (d) A partir de quelle valeur de n peut-on affirmer que B_n est une valeur approchée de B à 10^{-4} près ? Conclure