Devoir maison 2

Vous devez le faire par groupe de 2 ou 3.

Exercice 1 :Une fonction

On pose $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition de f, son domaine de dérivation.
2. Calculer f'. Simplifier f.
3. Retrouver ce résultat à l'aide de la trigonométrie.

Exercice 2 : Relation d'ordre et injection

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné (cela siginifie que $\leqslant$ est une relation d'ordre définie sur E). Pour tout élément x de E on définit la partie $\phi(x) = \{t \in E/t \leqslant x\}$

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2 (x \leqslant y \Longleftrightarrow \phi(x) \subset \phi(y))$
2. Démontrer que ϕ est une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Est-ce une surjection ?
3. Réciproquement, soit Φ est une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E par : $\forall (x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \Phi(x) \subset \Phi(y))$ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Cauchy-Schwarz et Hardy

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
   Soient $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ des réels fixés. On souhaite prouver l'inégalité suivante :
   $$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_k^2}$$
   (a) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas où $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$
   (b) On suppose maintenant qu'au moins un des réels $a_0, \dots, a_n$ est non nul.
   Et on pose $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k x + b_k)^2$
   Montrer que S est une fonction polynomiale de degré 2, puis montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (On pourra calculer le discriminant et essayer de comprendre quel est son signe)
2. Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^{2n}$ On pose $m = min\{\dfrac{x_k}{y_k}, k \in [\![1,n]\!]\}$ et $M = max\{\dfrac{x_k}{y_k}, k \in [\![1,n]\!]\}$
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 + mM \sum_{k=1}^{n} {y_k}^2 \leqslant (m+M) \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$
   (b) Montrer que $\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2, \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$
   (c) En déduire que : $\displaystyle\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2} \leqslant \frac{m+M}{2\sqrt{mM}} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$
3. **Inégalité de Hardy**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n$
   (a) i. Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!] : \displaystyle\sum_{p=1}^{k} a_p \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p} \geqslant \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$
   ii. En déduire l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4 \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{a_p} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}$
   (b) i. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$

ii. En déduire que $\forall p \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2p^2}$

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$