Devoir surveillé 1

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements.Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page.(pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés. **+1 point si cette consigne est respectée, -1 dans le cas contraire**

La machine est interdite

De la trigonométrie

1. Résoudre $\sin(4x) + \sin(2x) = \cos(x)$
2. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3\cos(x) + 4\sin(x)$. Déterminer le maximum et le minimum de f
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(3x)dx$
4. Résoudre $\sin(x) - \cos(x) = 1 - \tan(x)$
5. On pose x et y deux éléments de $]0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $\tan(x) = \frac{1}{7}$ et $\tan(y) = 2$
   (a) Calculer $\tan(x + 2y)$.
   (b) En déduire $x + 2y$
   (c) Calculer $\cos(2y)$

Des sommes

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
   Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$
2. On note (a_n) et (B_n) deux suites. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $b_n = B_{n+1} - B_n$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k$ (n est un entier fixé non nul)
3. (a) Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+x} \geqslant 1 + \frac{x}{3}$ d'inconnue $x \in [-1, +\infty[$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{3(n+1)}$.
   (c) En déduire un réel $a > 0$ pour lequel $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{a}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.
   (d) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$ converge. On ne demande pas la valeur de sa limite.
   (e) Proposez une autre méthode pour démontrer que la suite précédente converge.

Intégration

1. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2(x)dx$
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\ln(x^2+1)dx$
   Pour ce calcul on pourra déterminer a, b, c 3 réels tels que $\forall x > 0, \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$ et on admettra que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{4}$

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$
   (a) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} ($n \in \mathbb{N}$)
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ en fonction de certains éléments de la suite (I_n)
   (c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} (I_n)$, (on pourra essayer d'utiliser un encadrement) puis $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

Encore de la trigonométrie

Soit n un entier naturel impair supérieur ou égal à 3.

1. Montrer que : $\exists! a \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos(a) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. On note $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} = 2u_{k+1} - nu_k$
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\cos(ka) = \dfrac{u_k}{\sqrt{n}^k}$
   (b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k$ est un entier relatif non divisible par n.
3. On suppose que $\dfrac{a}{\pi}$ est rationnel.
   (a) Justifier que : $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $a = \dfrac{p\pi}{q}$
   (b) Calculer $\cos(2qa)$ et obtenir une contradiction.