

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements. Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page. (pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés. +1 point si cette consigne est respectée, -1 dans le cas contraire

La machine est interdite

On pourra utiliser la propriété suivante : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum (pour l'ordre usuel $\leq$)

Applications

Les questions sont indépendantes

- On considère l'application Jour : $E = \{\text{dates de l'année 2024}\} \rightarrow F = \{\text{lundi, mardi, ..., dimanche}\}$ qui à toute date de l'année 2024 associe le jour de la semaine correspondant. L'application Jour est-elle injective, surjective, bijective?
- Soient E un ensemble et l'application $\text{comp} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$. L'application comp est-elle injective? surjective? bijective?

$$X \mapsto \overline{X}$$
- Soient E un ensemble non vide et A une partie non vide de E . On considère l'application $\Psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$

$$X \mapsto X \cup A$$

 Ψ est-elle injective? surjective?
- On considère les applications suivantes :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \mapsto \frac{x-2}{x-4}, \quad (x, y) \mapsto 2y^2 + x, \quad (x, y) \mapsto (x+y, x-y, x+y),$$
et $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (3xy, x^3 + y^3)$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité de f, g, h, l .
- Soit E un ensemble non vide. Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$
(a) Montrer que si f est une injection alors $f \circ f = \text{id}_E$. En déduire que dans ce cas f est bijective.
(b) Montrer que si f est une surjection alors f est injective.
- Soit $f : E \rightarrow F$ Montrer que f est bijective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E), f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Dénombrabilité

On dit qu'un ensemble infini est dénombrable s'il existe une bijection de cet ensemble dans $\mathbb{N}$

- Etude de quelques exemples :
(a) Montrer que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable
(b) A l'aide d'un exemple déjà vu dans le cours montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. (On ne se contentera pas de donner l'application on justifiera les résultats)
(c) A l'aide d'un exemple déjà vu dans le cours montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
(d) i. Soit $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \Phi(n) \geq n$
ii. Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Montrer que A est dénombrable. (On pourra poser $f(0) = \min A$, $f(1) = \min(A \setminus \{f(0)\})$ et ainsi de suite et étudier f .)
- Soient E et F deux ensembles infinis. S'il existe une application $f : E \rightarrow F$ qui soit injective et si F est dénombrable, alors E est dénombrable.
- Soient E et F deux ensembles infinis. S'il existe une application $f : F \rightarrow E$ qui soit surjective et si F est dénombrable, alors E est dénombrable.
- Montrer que le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable. (On pourra utiliser $\mathbb{N}^2$)
- Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Treillis

Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\leq$. Soit A une partie de E . On note quand elles existent, $\sup(A)$ la borne supérieure de A c'est à dire le plus petit des majorants de A et $\inf(A)$ la borne inférieure de A c'est à dire le plus grand des minorants de A au sens de la relation d'ordre $\leq$.

On dit que E est un treillis s'il vérifie $\forall (x, y) \in E^2, \sup\{x, y\}$ et $\inf\{x, y\}$ existent.

Rmq si $\{A_i, i \in I\}$ est un ensemble d'ensemble, la réunion de tous ces ensembles sera notée $\bigcup_{i \in I} A_i$, l'intersection de

tous ces ensembles sera notée $\bigcap_{i \in I} A_i$

1. Soit E un ensemble non vide.
 - (a) Soit A une partie non vide de E . Montrer que si A possède un maximum α alors A possède une borne supérieure et $\sup(A) = \alpha$.
On montrerait de même que si A possède un minimum alors A possède une borne inférieure et elle vaut ce minimum.
 - (b) Si $E = \mathbb{R}$ et $\leq$ est l'ordre usuel. On pose $A = [0, 1[$. Montrer que A a une borne supérieure et que ce n'est pas un maximum.
2. (a) Montrer qu'un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leq$ totale est un treillis.
 - (b) Soit X un ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(X)$ muni de $\subset$ est un treillis.
 - (c) Soit E un treillis. Montrer que $\forall (x, y, z) \in E^3, \sup\{x, y, z\}$ existe et vaut $\sup\{\sup\{x, y\}, z\}$
3. On dit qu'un treillis E est complet si toute partie non vide de E possède une borne supérieure et une borne inférieure dans E . Dans cette question, on supposera que E est un treillis complet .
 - (a) Montrer que E admet un plus petit élément.
 - (b) Soit X un ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(X)$ muni de $\subset$ est un treillis complet .
 - (c) Soit f une application croissante de E dans E (ie $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$)
Montrer que $\exists a \in E, f(a) = a$ Pour cette dernière question, on pourra considérer $\mathcal{H} = \{x \in E, x \leq f(x)\}$. Il s'agira à l'aide des questions précédentes de justifier que $\mathcal{H}$ est non vide, qu'il possède une borne supérieure notée a et que $f(a) = a$.