

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements. Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page. (pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés. +1 point si cette consigne est respectée, -1 dans le cas contraire

La machine est interdite

De la technique

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre $e^z = 4(1+i)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre $(1+z)^{2n+1} + (z-1)^{2n+1} = 0$
3. Résoudre $z^2 - (2+2i)z + (3-2i) = 0$
4. Montrer que $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$

Une équation fonctionnelle

L'objet du problème est de résoudre le problème (*) suivant.

Déterminer les applications F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} F \text{ est continue en } 0 \\ \forall x \in]-1, 1[, F\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = (1-x^2)F(x) \end{cases}$$

1. Etude d'une application particulière.
 - (a) i. Etudier les variations de Φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\Phi(x) = x - \arctan(x)$
 ii. En déduire que $\forall x > 0, \arctan(x) < x$.
 iii. Montrer que $\forall x > 0, \arctan(x) > x - \frac{x^3}{3}$
 - (b) On pose $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Obtention d'une famille d'applications solutions de (*). (Rmq f désignera l'application définie dans le 1.(b))
 - (a) Montrer que f est solution de (*) si et seulement si $\underbrace{\left[\forall x \in]-1, 1[, 2 \arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \right]}_{(P)}$.
 - (b) Démontrer la propriété (P) de trois façons différentes :
 - i. En utilisant le changement de variable $x = \tan(u)$ (on précisera bien l'ensemble dans lequel u varie)
 - ii. En composant chaque membre de l'égalité par la fonction tangente.
 - iii. Par dérivation.
 - (c) En déduire que, $\forall a \in \mathbb{R}$, la fonction af est solution du problème (*).
3. Soit F une solution du problème (*).

- (a) On considère l'application G définie par : $\forall y \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[G(y) = F(\tan(y))$ Dans cette question a est un réel non nul de $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

- i. Etablir que $G(a) = \left(1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)\right) G\left(\frac{a}{2}\right)$
- ii. Montrer que : $\forall n \geq 2$

$$G(a) = G\left(\frac{a}{2^n}\right) \frac{\cos(a)}{\cos^2\left(\frac{a}{2^n}\right)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)}$$

iii. Montrer que $\forall n \geq 2, \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)} = \frac{2^{n-1}}{\sin(a)} \sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)$

iv. Montrer que $G(a) = G(0) \frac{a}{\tan(a)}$

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) = F(0) \frac{\arctan(x)}{x}$

(c) Conclure.

Une application

On pose $f(z) = \frac{z - 2i}{z + 2}$

1. Montrer que f effectue une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ dans un ensemble à déterminer. Donner l'expression de sa bijection réciproque.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ et représenter cet ensemble dans le plan complexe. (On pourra se contenter de faire un seul graphe pour les questions 2. 3.4.)
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ et représenter cet ensemble dans le plan complexe.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$ et représenter cet ensemble dans le plan complexe.
5. On note C le cercle constitué par les nombres complexes de module 2 en excluant $z = -2$
 - (a) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$ Déterminer $f(2e^{i\theta})$
 - (b) En déduire que $f(z)$ appartient à une droite très simple
 - (c) Réciproquement montrer que tout point de cette droite est l'image par f d'un élément de C .

Sommes et inégalités

On pourra utiliser que si n et p sont deux entiers non nuls et si $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n] \times [0,p]}$ est une famille de $\mathbb{C}$ alors

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^p a_{i,j} = \sum_{j=0}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j} \quad \text{Soient } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Calculs préliminaires

1. Soit $(m, k, p) \in \mathbb{N}^3$. Déterminer la partie réelle de $(1 + \omega^k)^m \omega^{-kp}$ (le résultat sera exprimé comme à l'aide d'un produit).
- On pose $\forall r \in \mathbb{Z}$, posons $S_r = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^r$
2. Résoudre l'équation $\omega^p = 1$ d'inconnue $p \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire le calcul de S_r en fonction de $r \in \mathbb{Z}$

Des inégalités

Soient a et b deux nombres complexes.

1. Calculer, en fonction de a, b et n uniquement $\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b)$
2. Montrer que $n|a| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{k=0}^{n-1} |b + \omega^k a|$.
4. En déduire que $|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$

Des sommes

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^n (w^k + z)^n = n(z^n + 1)$
2. En appliquant la formule ci-dessus pour les valeurs $z = 1$ et $z = -1$, donner les expressions simples de :

$$C = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos^n \left(\frac{k\pi}{n} \right) \text{ et } S = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sin^n \left(\frac{k\pi}{n} \right)$$