MPSI 832 ☕

2024-2025

Devoir surveillé 4

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements.Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page.(pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés. **+1 point si cette consigne est respectée, -1 dans le cas contraire**

La machine est interdite

Une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

Ici on rappelle que :

- f est dite continue sur un intervalle si f est continue en tout point de cet intervalle. Par ailleurs on dit que f est continue en a si $f(x) \underset{x\to a}{\to} f(a)$
- si f est continue en a et si $u_n \to a$ alors $f(u_n) \to f(a)$

Dans ce sujet f est continue sur $[0,1]$ et $f(0) < 0$ et$f(1) > 0$. On cherche à prouver que $\exists a \in [0,1], f(a) = 0$. On ne peut pas utiliser le théorème des valeurs intermédiaires car nous allons le démontrer.
On pose $A = \{x \in [0,1], f(x) \leqslant 0\}$

1. Montrer que A possède une borne supérieure. On la notera a.
2. Montrer que $a \in [0,1]$
3. A l'aide du critère séquentiel de la borne supérieure, montrer que $f(a) \leqslant 0$
4. Montrer que $a < 1$ puis montrer que :$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, a + \dfrac{1}{n} \in [0,1[$
5. En déduire que $f(a) = 0$

Equation différentielle

On pose $I =]0,+\infty[$. On note (E) l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 2x$. On cherche à résoudre cette équation en utilisant deux méthodes. Les questions 1. et 2. seront à traiter de façon indépendantes.

1. **Première méthode**
   (a) Déterminer une solution de l'équation homogène associée à (E) de la forme $x \longmapsto x^k$ où $k \in \mathbb{N}$
   (b) On pose $\forall x \in I, y(x) = xz(x)$.
   Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $(E_1) : xz'' + z' = \dfrac{2}{x}$
   (c) Résoudre l'équation (E_1) sur I.
   (d) Conclure.
2. **Deuxième méthode**
   (a) On pose $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(e^t)$
   Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $(E_2) : z'' - 2z' + z = 2e^t$
   (b) Résoudre (E_2) et conclure.
3. Peut-on prolonger certaines des solutions de l'équation (E) en fonctions continues sur $[0,+\infty[$? Dérivables sur $[0,+\infty[$?
4. On cherche dans cette question à déterminer les applications dérivables ur I et vérifiant :

$$\forall x \in I, f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1$$

   (a) Justifier que f est deux fois dérivable sur I
   (b) Montrer que f est solution de (E).
   (c) Conclure

SERIES DE ENGEL

On pourra admettre que si $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ avec $a < b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$ et on rappelle que $\frac{a^n}{n!} \to 0$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites croissantes d'entiers supérieurs ou égaux à deux.

1. Soit $(a_n) \in \mathcal{A}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 ... a_k}$

   Montrer que (S_n) converge et que sa limite notée $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait l'inégalité :$0 < \frac{1}{a_0} < [a_n]_{n\in\mathbb{N}} \leqslant \frac{1}{a_0 - 1} \leqslant 1$
2. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $[p]_{n\in\mathbb{N}}$
3. On note $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor + t - 1 \end{array}$

   Montrer que : $\forall t \in]0,1],\ f(t) \in]0,t]$.
4. On souhaite montrer que l'application $(a_n) \longmapsto [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est surjective de $\mathcal{A}$ dans]0,1]

   Soit $x \in]0,1]$ On note (x_n) la suite définie par $x_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer que (x_n) est strictement positive et décroissante.

   On pose à présent pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + 1$ de sorte que $x_{n+1} = a_n x_n - 1$
   (b) Montrer que $(a_n) \in \mathcal{A}$

   On pose enfin $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 ... a_k}$
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 ... a_n}$
   (d) En déduire que (S_n) converge vers x.

   Conclusion $x = [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ Cette écriture particulière de x est appelé un développement de x en série de Engel
5. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{e^t(x-t)^n}{n!}dt$
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$
   (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et $\text{ch}(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
6. (a) Calculer $[n+2]_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que : $\text{ch}(\sqrt{2}) - 2 = [(n+2)(2n+3)]_{n\in\mathbb{N}}$ (on peut noter $a_k = (k+2)(2k+3)$ et montrer que $a_0 \ldots a_k = \frac{(2k+4)!}{2^{k+2}}$)
7. (a) Montrer que si $(a_n) \in \mathcal{A}$ est stationnaire alors $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est rationnel.

   Pour la réciproque, on se donne un rationnel $x = \frac{p}{q}$ de $]0,1]$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$
   (b) Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, qx_n \in \mathbb{N}$ ((x_n) est la suite définie au 4.)
   (c) En déduire que la suite (x_n) est stationnaire, puis que c'est aussi le cas de (a_n).
8. On souhaite maintenant montrer que l'application $(a_n) \longmapsto [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est injective sur $\mathcal{A}$.
   (a) Montrer que si $(b_n), (b'_n)$ sont deux suites de $\mathcal{A}$ telles que $b_0 < b'_0$ alors $[b_n]_{n\in\mathbb{N}} > [b'_n]_{n\in\mathbb{N}}$

   Soient $(a_n), (a'_n)$ deux suites de $\mathcal{A}$. On suppose que $[a_n]_{n\in\mathbb{N}} = [a'_n]_{n\in\mathbb{N}}$ et par l'absurde que $(a_n) \neq (a'_n)$
   (b) Justifier l'existence de $p = \min\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq a'_n\}$
   (c) Conclure
9. Montrer que e et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.