MPSI 832

2024-2025

Devoir surveillé 5

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements.Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page.(pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés.

+1 point si votre rédaction est soignée, votre copie n'est pas sale et que la rédaction est correcte, -1 dans le cas contraire

La machine est interdite

Une suite définie implicitement

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ .Montrer que l'équation $\ln(x) = -nx$ d'inconnue $x > 0$ possède une et une seule solution x_n.
2. Montrer que (x_n) est monotone.
3. Montrer que (x_n) converge. Déterminer la limite de (x_n)
4. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et simplifier $nx_n + \ln(nx_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
5. En déduire un équivalent de x_n puis un développement asymptotique de x_n avec un terme significatif.
6. (a) Soit (a_n) et (b_n) deux suites qui tendent vers $+\infty$ équivalentes. Montrer que $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$
   (b) On pose $v_n = x_n - \dfrac{\ln(n)}{n}$. Déterminer un équivalent de v_n puis un développement asymptotique de x_n avec deux termes significatifs.

Des équations fonctionnelles

On veut déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des applications f telles que :

— $\star$ f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

— $\star$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) + f(y) = 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

1. Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que l'application : $g : x \longmapsto f(x) - f(0)$ est aussi élément de $\mathscr{E}$
2. Soit $f \in \mathscr{E}$ telle que $f(0) = 0$. On pose $f(1) = k$
   (a) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = 2f(x+1) - f(x)$
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = kn$
   (c) Soit $\mathscr{D} = \left\{\dfrac{n}{2^p}, (n,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$
      i. Montrer que $\forall x \in \mathscr{D}, f(x) = kx$
      ii. Montrer que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$
      iii. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = kx$
3. Déterminer $\mathscr{E}$
4. **Applications**
   (a) En déduire les applications continues g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{g(x)g(y)} = g\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
   (b) En déduire les applications continues g de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que
   $$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, g(\sqrt{xy}) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$$
   (c) En déduire les applications continues g de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que
   $$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, g(\sqrt{xy}) = \sqrt{g(x)g(y)}$$

Un problème

Soit $x \geqslant 0$ On note $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{u_{n+1}(x) = \dfrac{(u_n(x))^2}{n+1}}_{\text{Propriété (*)}} \end{cases}$

ATTENTION SPOLIER ALERT : Il est interdit d'appliquer la théorie des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ car ici f dépend de n

Le but de ce problème est d'étudier ces suites pour différentes valeurs initiales $x \geqslant 0$. Toutes les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on étudiera dans ce problème verifieront la propriété (*)

1. **Partie A**
   (a) Montrer que si $x = 0$ alors la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante nulle.
   (b) Soit $x \geqslant 0$. Montrer que si $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est nulle.
   (c) Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant y$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(y)$
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $\begin{array}{cccc} u_n : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & u_n(x) \end{array}$ est continue.

2. **Partie B : Etude des bassins d'attraction**
   On note $\mathscr{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}_+, (u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\}$
   On note $\mathscr{E}_\infty = \{x \in \mathbb{R}_+, (u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty\}$
   (a) A quel ensemble appartient 0 ?
   (b) i. Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante sur $u_n(x)$ on a $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$
   ii. On suppose que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{p+1}(x) \leqslant u_p(x)$
   Montrer que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang p et qu'elle converge vers 0.
   iii. En déduire que $\mathscr{E}_0 \cup \mathscr{E}_\infty = \mathbb{R}_+$ et $\mathscr{E}_0 \cap \mathscr{E}_\infty = \emptyset$
   (c) Montrer que $1 \in \mathscr{E}_0$
   (d) On suppose que :$\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p(x) \geqslant p + 2$
   Montrer que $\forall n \geqslant p, u_n(x) \geqslant n + 2$. En déduire que $\mathscr{E}_\infty$ est non vide.
   (e) soit $a \in \mathscr{E}_0$. Montrer que $[0, a] \subset \mathscr{E}_0$. Montrer un résultat similiare pour $\mathscr{E}_\infty$
   (f) i. Soit $b \in \mathscr{E}_\infty$. Montrer que $\mathscr{E}_0 \subset [0, b[$
   ii. Montrer alors que $\mathscr{E}_0$ admet une borne supérieure que l'on notera α
   iii. Montrer que $[0, \alpha[\subset \mathscr{E}_0$ et $]\alpha, +\infty[\subset \mathscr{E}_\infty$

3. **Partie C : Propriétés et calcul de α**
   (a) Montrer que s'il existe un rang p tel que $u_p(x) < 1$ alors la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Vérifier que la réciproque est vraie.
   (b) i. Déduire de la question précédente et de 1.d que si $a \in \mathscr{E}_0, \exists \beta > 0$ tel que $a + \beta \in \mathscr{E}_0$
   ii. Montrer que $\alpha \in \mathscr{E}_\infty$
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n + 1 < u_n(\alpha) \leqslant n + 2$. En déduire un équivalent de $u_n(\alpha)$
   (d) On pose $\epsilon_n = n + 2 - u_n(\alpha)$
   i. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \epsilon_n \in [0, 1[$ et montrer en utilisant la relation (*) que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \epsilon_{n+1} \geqslant 2\epsilon_n - \dfrac{1}{n}$
   ii. Montrer que si : $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\epsilon_p \geqslant \dfrac{1}{p}$ alors la suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant p}$ est croissante et converge. En étudiant la limite de la suite (ϵ_n)montrer que l'on aboutit à une contradiction.
   iii. En déduire la limite de (ϵ_n)
   (e) On pose $z_n = \dfrac{u_n(x)}{u_n(\alpha)}$.
   Trouver une relation entre z_{n+1} et z_n et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = u_n(\alpha)\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{2^n}$
   (f) i. Pour $x > 0$ on pose $v_n(x) = \dfrac{\ln(u_n(x))}{2^n}$
   Montrer que $(v_n(x))$ converge vers 0 si et seulement si $x = \alpha$
   ii. Simplifier $v_{n+1}(x) - v_n(x)$ et en déduire que $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}}$