MPSI 832⚽

2020-2025

Devoir surveillé 6

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements.Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page.(pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés.

La machine est interdite +1 point si votre rédaction est soignée, votre copie n'est pas sale et que la rédaction est correcte, -1 dans le cas contraire

Partie technique à rendre à 9h au plus tard

1. Former le développement limité à l'ordre et au voisinage indiqués des fonctions définies par :
   (a) 3,0, $f(x) = e^{e^x}$
   (b) 3,0, $g(x) = \dfrac{x(1+\sin(x)) - \operatorname{sh}(x)}{\ln(\cos(x))}$
   (c) 3,0 $h(x) = \dfrac{\arctan(x)}{3+e^{2x}}$
2. Calculer les limites indiquées
   (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{h(x) - \frac{x}{4\sqrt{1+x}}}{\sin(x)(e^x-1)^2}\right)$
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Problème dont la source sera révélée plus tard.

On pose $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

1. **Etude de f**
   (a) Etudier la continuité à gauche et à droite, la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.
   (b) Etudier les limites et variations de f
   (c) Former le DL à l'ordre 3 en 1 de f.
2. **Une équation différentielle**
   (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ $x^2y' + (2x-1)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
   (b) Cette équation $(\mathcal{E})$ a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, les préciser.
3. **Dérivées successives et polynômes associés**
   (a) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n$ une fonction polynomiale telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{\frac{-1}{x}}$ (On pourra démontrer que $P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)$)
   (c) Calculer P_0, P_1, P_2
   (d) Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de P_n
   (e) On pose $\forall x > 0, g(x) = x^2f(x)$
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n+1)} = f^{(n)}$
   (f) En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n+1)}$ démontrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, P_{n+1}(x) = (1-2(n+1)x)P_n(x) - n(n+1)x^2P_{n-1}(x)$
   (g) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$

(h) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, x^2 P_n''(x) + (1-2nx)P_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$

Problème 2 : Inégalités d'interpolation des dérivées. L'origine du sujet de concours sera donnée plus tard...

- Soit K un entier naturel. Pour tout intervalle I, on note $\mathcal{C}^K(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^K$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in [\![0, K]\!]$ on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$).
- Dans le cas particulier $I = [0,1]$, pour toute fonction bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ On rappelle qu'une fonction polynômiale de degré n possède au maximum n racines.

Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0,1]$. Le but de ce problème est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels $x_1, \ldots, x_K$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \quad \max_{0\leqslant k\leqslant K-1} \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(K)} \right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| . \tag{I.K}$$

Une inégalité du type précédent est appelée inégalité d'interpolation à l'ordre K.

1. Préliminaire :
   (a) Soient f et g deux applications bornées sur [0,1].
   Montrer que $f+g$ est bornée sur [0,1] et que $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$
   (b) Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0,1]$.
   $\forall i \in [\![1, K]\!]$ on note $\forall x \in \mathbb{R}, L_i(x) = \displaystyle\prod_{j\in[\![1,K]\!]\setminus\{i\}} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$
   Calculer $\forall i \in [\![1, K]\!], \forall p \in [\![1, K]\!], L_i(x_p)$
2. **Cas particulier K=1**
   On fixe $x_1 \in [0,1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1 ,
   $$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]), \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + C\,|f(x_1)| . \tag{I.1}$$
   (a) Montrer l'inégalité d'interpolation avec $C = 1$.
   On devra monter dans un premier temps que $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ existent.
   (b) Soit $C \in]0,1[$. À l'aide d'un exemple simple de fonction f, montrer que l'inégalité d'interpolation est fausse.
3. **Cas particulier K=2**
   On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0,1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2 ,
   $$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \quad \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty) \leqslant \|f''\|_\infty + C\,(|f(x_1)| + |f(x_2)|) \tag{I.2}$$
   (a) Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité
   $$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant \|f''\|_\infty .$$
   (b) En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a
   $$\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$$
   (c) Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.
4. **Cas général : Interpolation de Lagrange**
   On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K, donnée par (I.K). On fixe $K \in \mathbb{N}^*$
   (a) Soit $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0,1]$.
   Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à $K-1$ telle que $\forall i \in [\![1, K]\!], f(x_i) = P(x_i)$ (On pourra s'inspirer d'un exercice déjà fait en classe).

(b) Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K-k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule. (On fera un raisonnement soigné)

(c) En déduire l'inégalité $\left\| f^{(k)} - P^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(k+1)} - P^{(k+1)} \right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

(d) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation **(I.K)** est vérifiée.

Exercice bonus. A ne traiter que si tout le reste a été traité. Inutile d'y répondre dans le cas contraire.

On considère une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en 0.
Démontrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

— f est dérivable en 0

— $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{f(2x) - f(x)}{x} \right)$ existe et est finie

---