MPSI 832 à rendre le 4 mars.

2024-2025

Devoir maison 4

Vous devez le faire par groupe de 2 ou 3.

Polynômes et théorème de Tchebychev,

On définit une suite de polynômes (T_n)(appelés polynômes de Tchebychev de première espèce) par la relation de récurrence suivante : $\begin{cases} T_0 = 1;\ T_1 = X \\ \forall n \geqslant 0, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$

Théorème de Tchebychev Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

1. **Étude élémentaire des polynômes T_n**
   (a) Expliciter T_i pour $i = 2$ et $i = 3$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n$ est un polynôme de degré n dont on donnera son coefficient dominant.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$
   (d) Déterminer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. **Etude des racines de T_n et ${T_n}'$ pour $n \in \mathbb{N}^*$**
   (a) Déterminer les racines de T_n et la factorisation de T_n .
   (b) Déterminer de même les racines de ${T_n}'$.
   On notera $s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1}$ ces racines
   (c) Calculer $T_n(s_1), \ldots, T_n(s_{n-1})$;
3. **Démonstration du théorème de Tchebychev**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Q un polynôme unitaire de degré n
   (a) Justifier l'existence de $\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |Q(x)|$.
   On définit $Q_n = T_n - 2^{n-1}Q$
   (b) Montrer que $\deg(Q_n) \leqslant n - 1$
   (c) On suppose que $\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$
      i. Montrer que $Q_n \neq 0$
      ii. Trouver une contradiction
   (d) Démontrer le théorème de Tchebychev.