MPSI 832

2024-2025

Devoir surveillé 8

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements.Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page.(pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés.

La machine est interdite +1 point si votre rédaction est soignée, votre copie n'est pas sale et que la rédaction est correcte, -1 dans le cas contraire

Des calculs : Cette partie est à rendre au plus tard à 9h mais elle doit vous prendre moins de temps

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ $F = \dfrac{X+2}{X^2(X^2+1)}$
2. Soit a, b, c les trois racines complexes de $P = X^3 + 2X^2 + X + 3$
   (a) Calculer $S = \dfrac{1}{1-a} + \dfrac{1}{1-b} + \dfrac{1}{1-c}$ et $T = \dfrac{1}{(1-a)^2} + \dfrac{1}{(1-b)^2} + \dfrac{1}{(1-c)^2}$
   (b) Former le polynôme de degré 3 unitaire dont a^2, b^2, c^2 sont les racines.

Un sujet de Moustachus célèbres

ATTENTION : L'ordre des questions est impératif, si vous ne le respectez pas, vous ne serez pas évalué.

Partie I : Généralités

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$
2. Etant donné $n \in \mathbb{N}$ Calculer $T_n(0)$ et $T_n(1)$
3. Déterminer T_n pour $n \in [\![0, 2]\!]$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$
7. Déterminer la factoristaion de T_n lorsque $n \geqslant 1$.
   En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \text{ si n est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in [\![0, n]\!]$ on note $a_j = \cos\left(\left(1 - \dfrac{j}{n}\right)\pi\right)$
   (a) Montrer que $\forall x \in [-1, 1], |T_n(x)| \leqslant 1$, avec égalité ssi $x \in \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$
   (b) Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, n\sin(n\theta) = \sin(\theta)T_n'(\cos(\theta))$
   (c) Lorsque $n \geqslant 2$, calculer $T_n'(a_j)$ lorsque $j \in [\![1, n-1]\!]$ et déterminer les racines de T_n'
9. On note $\|P\|_\infty = \displaystyle\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$ lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$
   (a) Justifier l'existence de $\|P\|_\infty$
   (b) Calculer $\|T_n\|_\infty$ lorsque $n \in \mathbb{N}$
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|$
   (d) En déduire que $\|T_n'\|_\infty = n^2$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$

Partie II : Majoration d'un polynôme sur $[1,+\infty[$

1. (a) Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,+\infty[$. Donner l'expression de sa bijection réciproque.
   (b) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, 2ch(a)ch(b) = ch(a+b) + ch(a-b)$
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, T_n(ch(x)) = ch(nx)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \geqslant 1, 1 \leqslant T_n(x) \leqslant \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n$

   Dans toute la suite on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n$ associés aux points de la famille $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ définis au I.8
3. Donner sans démonstration l'expression de L_j lorsque $j \in [\![0,n]\!]$. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner les coordonnées de P dans cette base lorsque $P \in \mathbb{R}_n[X]$
4. Montrer que $T_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} L_j$
5. Montrer que $\forall x \geqslant 1, T_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} |L_j(x)|$
6. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \geqslant 1, |P(x)| \leqslant \|P\|_\infty \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n$
7. Montrer que $\forall r \in [\![1,n]\!], \forall x \geqslant 1, T_n^{(r)}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} |L_j^{(r)}(x)|$ et en déduire
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \geqslant 1, |P^{(r)}(x)| \leqslant \|P\|_\infty |T_n^{(r)}(x)|$$

Partie III : Inégalité des frères Markov

Ici encore $n \in \mathbb{N}^*$

1. En revenant à la définition de T_n montrer que $(1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0$
2. A l'aide de la question précédente et de la formule de Leibniz, montrer que :
$$\forall r \in [\![0,n]\!], T_n^{(r)}(1) = \frac{n}{(n+r)} \frac{(n+r)!2^r r!}{(n-r)!(2r)!}, \text{ et } T_n^{(r)}(-1) = (-1)^{n+r} T_n^{(r)}(1)$$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$
   (a) Soit $a \in [-1,1]$ On pose $u = \begin{cases} 1 \text{ si } a \geqslant 0 \\ -1 \text{ si } a < 0 \end{cases}$ et $P_a = P\left(\dfrac{a+u}{2}X + \dfrac{a-u}{2}\right)$

   Montrer que $\forall r \in [\![1,n]\!], |P_a^{(r)}(1)| = \left(\dfrac{|a|+1}{2}\right)^r |P^{(r)}(a)|$
   (b) Montrer que $\forall r \in [\![1,n]\!], \|P^{(r)}\|_\infty \leqslant 2^r |T_n^{(r)}(1)| \|P\|_\infty$
   (c) Montrer enfin les inégalités :
$$\|P'\|_\infty \leqslant 2n^2 \|P\|_\infty \text{ et } \forall r \in [\![2,n]\!], \|P^{(r)}\|_\infty \leqslant 2^{2r} \frac{r!}{(2r)!} \frac{(n+r)!}{(n-r)!} \|P\|_\infty$$