MPSI 832

2024-2025

**Concours blanc**

---

*On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements.Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page.( pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés.*

---

**ATTENTION ! Désormais, dans la consigne, je rajoute que si votre copie est mal rédigée, confuse, je me réserve le droit d'enlever 1 point**
**Il y a deux parties(ANALYSE et ALGEBRE) je vous conseille de consacrer à chacun deux heures.Chaque partie sera équivalente dans le barème.**

**La machine est interdite**

---

# ANALYSE

---

Dans ce problème $\varphi$ désigne une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On suppose par ailleurs que $\varphi$ possède une limite $\ell$ (finie ou infinie) en $+\infty$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction $f$ où $f(x)$ est défini, pour $x$ réel, comme étant l'unique solution de l'équation $(E_x)$ d'inconnue $y$ :

$$(E_x) \qquad \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$$

La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement $f$.
La partie II permet d'aboutir à l'existence de $f$ si $\ell \neq 0$.
La partie III étudie des propriétés de la fonction $f$.

## Partie I

Dans cette partie, la fonction $\varphi$ est la fonction exponentielle exp.

1. Prouver que pour tout $x$ réel l'équation $(E_x)$ possède une unique solution notée $f(x)$.
   On montrera que $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
2. Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de l'intervalle d'étude.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant $f$. Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 pour la fonction $f$ au voisinage de 0.
   En déduire l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$ et la position locale de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.

## Partie II

Pour $x$ réel, on pose $\Phi_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_x^u \varphi(t)\,dt \end{array}$.

1. Justifier que $\Phi_x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée
2. Dans cette question seulement, $\varphi$ est définie, pour tout $t$ réel, par : $\varphi(t) = \dfrac{1}{\pi(1 + t^2)}$.

(a) Montrer que pour $x$ et $y$ réels, $\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1$.

(b) En déduire que pour tout $x$ réel, l'équation $(E_x)$ n'a pas de solution.

(c) Que vaut $\ell$ ? *Dans tout le reste de ce problème, on suppose que $\ell \neq 0$.*

3. Exprimer l'équation $(E_x)$ à l'aide de la fonction $\Phi_x$.

4.

(a) Montrer que $\Phi_x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?

(b) Montrer qu'il existe $t_0$ réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geqslant t_0$, $\varphi(t) \geqslant A$.
On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et $\ell$ réel.

(c) En déduire que pour tout $x$ réel, il existe $u \geqslant x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.

(d) Montrer que l'équation $(E_x)$ possède une solution unique.

*Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour $x$ réel, l'unique solution de l'équation $(E_x)$.*

## Partie III

1. Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout $x$ réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)$

2. En déduire que $f$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.

(a) On suppose dans cette question **a)**, que $\varphi$ ne s'annule pas. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour $x$ réel, montrer que :

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$

(b) On suppose dans cette question **b)**, qu'il existe $x_0$ réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que $\varphi$ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où $\varphi$ s'annule.
Montrer que $f$ n'est pas dérivable en $x_0$ mais que la courbe représentant $f$ possède au point d'abscisse $x_0$ une tangente verticale.

4. On se propose d'étudier la branche infinie de $f$ au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times$.

(a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geqslant a$, $\varphi(t) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

(b) En déduire que si $x \geqslant a$, $|f(x) - x| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?

5. Etudier de même l'asymptote éventuelle de la courbe représentative de $f$ au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^\times$.

6. Dans cette question, on suppose $\varphi$ paire. On note $\Gamma$ le graphe de $f$.

(a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y, -x) \in \Gamma$.

(b) En déduire que la courbe représentant $f$ possède un axe de symétrie à déterminer.

# ALGEBRE : Matrices «toutes-puissantes»

Notations et objectifs Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $p$ un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $I_p$ la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On pourra confondre $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$. Une matrice $N$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel $r$ tel que $N^r = 0$. Si $M_1, \ldots, M_k$ sont des matrices carrées, la matrice $diag(M_1, \ldots, M_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $M_1, \ldots, M_k$.
**On dit qu'une matrice $A$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est "toute-puissante sur $\mathbb{K}$" et on notera en abrégé $\mathcal{TP}\mathbb{K}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $B$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$** . On note $\mathcal{T}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ toutes-puissantes sur $\mathbb{K}$ : $\mathcal{T}_p(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) / \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ tel que } A = B^n\}$
L'objectif principal du sujet est d'établir le résultat suivant : **Toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est $\mathcal{TP}\mathbb{C}$.**
Dans la partie I, on traite quelques exemples et contre-exemples.
Dans la partie II, on traite le cas des matrices unipotentes c'est-à-dire de la forme $I_p + N$avec $N$ nilpotente.
Dans la partie III, on montre que, dans le cas où le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé, on peut ramener l'étude au cas des matrices de la forme $\lambda I_p + N$ avec $N$ nilpotente et on montre le théorème principal

## Partie I : quelques exemples

1. Le cas de la taille 1
   (a) Montrer que $\mathcal{T}_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.
   (b) Déterminer $\mathcal{T}_1(\mathbb{C})$.(On justifiera la résultat)
2. Une condition nécessaire...
   (a) Démontrer que si $A \in \mathcal{T}_p(\mathbb{K})$, alors $detA \in \mathcal{T}_1(\mathbb{K})$.
   (b) En déduire un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas $\mathcal{TP}\mathbb{R}$.
3. ... mais pas suffisante.
   Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ Démontrer qu'il n'existe aucune matrice $B$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. En déduire que la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante.
4. Un cas où $A$ est diagonalisable Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme canoniquement associé
   (a) Calculer $det(\lambda I_3 - A)$ En déduire $\operatorname{Ker}(\lambda id - f)$ en fonction de $\lambda$
   (b) Montrer que $A$ est semblable à une matrice diagonale $D$
   (c) Montrer que $A$ est $\mathcal{TP}\mathbb{R}$
5. Un exemple de nature géométrique
   (a) Soit $\theta$ un réel. On note $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ Calculer $\mathbb{R}(\theta)^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}$
   (b) Soit $A = -I_2$ En déduire que $A$ est $\mathcal{TP}\mathbb{R}$.
6. Le cas des matrices nilpotentes.
   Soit $N$ une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Démontrer que si $N$ est $\mathcal{TP}\mathbb{K}$, alors $N$ est la matrice nulle.

## Partie II Le cas des matrices unipotentes

Soit $N$ une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Nous allons montrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est $\mathcal{TP}\mathbb{K}$. On pourra confondre polynôme et fonction polynôme.

7. Une application des développements limités
   (a) Soit $V$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0. Démontrer qu'il existe un polynôme $Q$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^p Q$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme $U$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait, au voisinage de 0 : $1 + x = (U(x))^n + o(x^p)$ (on pourra utiliser un développement limité de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ pour un $\alpha$ bien choisi !)

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $Q$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $1 + X = U^n + X^p Q$.

8. Applications

   (a) Démontrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est $\mathcal{T}P\mathbb{K}$.

   (b) $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. En déduire que si $\lambda$ est $\mathcal{T}P\mathbb{K}$, alors la matrice $\lambda I_p + N$ est $\mathcal{T}P\mathbb{K}$.

## Partie III : le cas où le polynôme caractéristique est scindé

Dans toute cette partie, $A$ désigne une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique noté $\chi_A$ est scindé sur$\mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme : $\chi_A = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i}$
avec $k, r_1, \ldots, r_k$ des entiers de $\mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de $A$, éléments de $\mathbb{K}$.
On rappelle que le polynôme caractéristique de $A$ est $\det(XI_p - A)$ et que ses racines sont les valeurs propres de $A$.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.
Enfin, pour $i \in [[1,k]]$, on note $C_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ que l'on appelle sous-espace caractéristique de $u$ associé à la valeur propre $\lambda_i$.
**On admet que** $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_k$**.**

9. (a) Soit $v$ un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ qui commute avec $u$ et $Q$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que $\mathrm{Ker}\, Q(u)$ est stable par $v$.

   (b) En déduire que pour tout $i \in [[1,k]]$, le sous-espace caractéristique $C_i$ est stable par $u$. On note ainsi $u_{C_i}$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $C_i$.

10. Justifier que l'application $u_{C_i} - \lambda_i id_{C_i}$ est un endomorphisme de $C_i$ nilpotent.

11. En déduire que la matrice $A$ peut s'écrire sous la forme : $A = P diag(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1}$ , avec $P$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in [[1,k]]$, $p_i = dim C_i$ et $N_i$ est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$.

12. Démontrer que, si pour tout $i \in [[1,k]]$ la matrice $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est $\mathcal{T}P\mathbb{K}$, alors $A$ est elle-même $\mathcal{T}P\mathbb{K}$.

13. Le résultat annoncé

    (a) Conclure que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est $\mathcal{T}P\mathbb{C}$.

    (b) Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est-elle $\mathcal{T}P\mathbb{C}$?