MPSI 832 ☕

2024-2025

Concours blanc bis

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements.Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page.(pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés.

ATTENTION ! Désormais, dans la consigne, je rajoute que si votre copie est mal rédigée, confuse, je me réserve le droit d'enlever 1 point
Il y a deux parties(ANALYSE et ALGEBRE) je vous conseille de consacrer à chacun deux heures.Chaque partie sera équivalente dans le barème.

La machine est interdite

ANALYSE

Dans ce problème φ désigne une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On suppose par ailleurs que φ possède une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f où $f(x)$ est défini, pour x réel, comme étant l'unique solution de l'équation (E_x) d'inconnue y :

$$(E_x) \qquad \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$$

La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement f.
La partie II permet d'aboutir à l'existence de f si $\ell \neq 0$.
La partie III étudie des propriétés de la fonction f.

Partie I

Dans cette partie, la fonction φ est la fonction exponentielle exp.

1. Prouver que pour tout x réel l'équation (E_x) possède une unique solution notée $f(x)$.
   On montrera que $f(x) = \ln(1+e^x)$.
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f. Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage de 0.
   En déduire l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$ et la position locale de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.

Partie II

Pour x réel, on pose $\Phi_x(u) = \displaystyle\int_x^u \varphi(t)\,dt$.

On rappelle que Φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour u réel, $\Phi_x'(u) = \varphi(u)$.

1. Dans cetet question seulement, φ est définie, pour tout t réel, par : $\varphi(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

   (a) Montrer que pour x et y réels, $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1$.

   (b) En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution.

(c) Que vaut ℓ ? *Dans tout le reste de ce problème, on suppose que $\ell \neq 0$.*

2. Exprimer l'équation (E_x) à l'aide de la fonction Φ_x.
3.
   (a) Montrer que Φ_x est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?
   (b) Montrer qu'il existe t_0 réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geqslant t_0$, $\varphi(t) \geqslant A$.
   On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et ℓ réel.
   (c) En déduire que pour tout x réel, il existe $u \geqslant x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.
   (d) En remarquant que $\Phi_x(x) = 0$, montrer que l'équation (E_x) possède une solution unique.

   Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour x réel, l'unique solution de l'équation (E_x).

Partie III

1. Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout x réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)$
(on pourra admettre les résultats de la question **II.3**).
2. En déduire que f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3.
   (a) On suppose dans cette question **a)**, que φ ne s'annule pas. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, montrer que :
   $$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$
   (b) On suppose dans cette question **b)**, qu'il existe x_0 réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que φ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où φ s'annule.
   Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentant f possède au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.
4. On se propose d'étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times$.
   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geqslant a$, $\varphi(t) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.
   (b) En déduire que si $x \geqslant a$, $|f(x) - x| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?
5. Etudier de même la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^\times$.
6. Dans cette question, on suppose φ paire. On note Γ le graphe de f.
   (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y, -x) \in \Gamma$.
   (b) En déduire que la courbe représentant f possède un axe de symétrie à déterminer.

ALGEBRE

Partie I

On rappelle que :

— Une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est souvent confondue avec son coefficient.

— Si C est une matrice à coefficients complexes, $\overline{C}$ est la matrice obtenue en conjuguant tous ses coefficinets.

— $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MX = \lambda X$.

— $\chi_M(\alpha) = det(\alpha I_n - M)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et χ_M le polynôme associé est unitaire, de degré n scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

On l'écrira $\chi_M = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ avec $\forall k \in [[1, n]], \lambda_k \in \mathbb{C}$ et ils ne sont pas forcément distincts

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ Montrer que λ est une valeur propre de M si et seulement si $\chi_M(\lambda) = 0$
2. Montrer que $det(M) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $Tr(M) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$

Partie II

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $I = [[1, n]]$.
On note $\mathcal{B}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall (i,j) \in I^2, |m_{i,j}| \leq 1$

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{K}), |det(M)| \leq A$

   On cherche à montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la constante A optimale est $n^{\frac{n}{2}}$
2. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ Montrer que $\overline{C}^T C \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\overline{C}^T C = 0$ si et seulement si $C = 0_{n,1}$.

   On notera $||C|| = \sqrt{\overline{C}^T C}$
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$ (qui sont considérées ici comme des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) telles que $\forall i \in I, ||C_i|| = 1$. On note $P = \overline{M}^T M$ et $\chi_P = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ son polynôme caractéristique, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des complexes pas forcément distincts.
   (a) Soit $k \in I$. Soit $X_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $PX_k = \lambda_k X_k$.Montrer que $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$
   (b) Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels positifs, alors $\prod_{k=1}^{n} x_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n$
   (c) Montrer que $|det(M)| \leq 1$
4. En déduire que si $M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{C})$ alors $|det(M)| \leq n^{\frac{n}{2}}$
5. Un exemple : On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $V = (v_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ telle que $\forall (i,j) \in I^2, v_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$
   (a) Justifier que $V \in \mathcal{B}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Déterminer $det(V)$ en fonction de ω
   (c) Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = n$
   (d) En déduire que $|det(V)| = n^{\frac{n}{2}}$

   On suppose pour la suite que $\exists M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $|det(M)| = n^{\frac{n}{2}}$
6. On fixe $(i,j) \in I^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on note M_x la matrice obtenue à partir de M en remplaçant $m_{i,j}$ par x. Montrer que $x \to det(M_x)$ est une fonction affine.
7. En déduire qu'il existe $H \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent ± 1telle que $|det(H)| = n^{\frac{n}{2}}$. **Une telle matrice est appelée matrice de Hadamard.**
8. Déterminer une matrice de Hadamard pour $n = 2$.

9. Montrer que $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice de Hadamard

10. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a ses coefficients égaux à ± 1 alors 2^{n-1} divise $detM$

11. En déduire que si il existe une matrice de Hadamard carrée d'ordre n alors $n = 1$, $n = 2$ ou n est divisible par 4.