MPSI 832

2024-2025

Devoir surveillé 9

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements.Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page.(pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés.

La machine est interdite +1 point si votre rédaction est soignée, votre copie n'est pas sale et que la rédaction est correcte, -1 dans le cas contraire

Exercice type et applications.

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A

1. Déterminer le rang de $f - \alpha id$ lorsque $\alpha \in \{1, 2\}$
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f - \alpha id)$ lorsque $\alpha \in \{1, 2\}$
3. Soit $u = (1 - 1, 0), v = (1, 0, -1), w = (1, 1, -3)$ Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice D de f dans cette base.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. Déterminer P. Soit $n \in \mathbb{N}$, Exprimer A^n en fonction de D, P, P^{-1} et n.
5. Calculer P^{-1} par la méthode de Gauss.
6. Une première application : On pose désormais le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = -y(t) - z(t) \\ y'(t) = -x(t) - z(t) \\ z'(t) = 3x(t) + 3y(t) + 4z(t) \end{cases}$ d'inconnue x, y, z 3 applications dérivables sur $\mathbb{R}$.
   On pose $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et on admet que $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
   Enfin on pose $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = DY(t)$
   (b) En déduire u, v, w puis x, y, z
7. Une deuxième application : Etude d'un commutant
   On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$ et $\mathcal{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), DM = MD\}$
   (a) Justifier que $\mathcal{C}(A)$ est un $\mathbb{R}$ ev et un anneau. On admettra que $\mathcal{C}(D)$ est aussi un $\mathbb{R}$ ev et un anneau.
   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\underset{\mathcal{B}'}{mat}(g) = M$.
      i. Montrer que $M \in \mathcal{C}(D) \iff f \circ g = g \circ f$
      ii. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors $\text{Ker}(f - \alpha id)$ est stable par g (un sev F de E est stable par f si $f(F) \subset F$)
      iii. En déduire la forme de M lorsque $M \in \mathcal{C}(D)$. En déduire $\mathcal{C}(D)$ et déterminer sa dimension.
      iv. En déduire $\mathcal{C}(A)$ (On pourra laisser les produits qui interviennent sans les calculer.)

Sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit

Dans la première partie on démontre un résultat que l'on pourra utiliser dans la partie II.La partie III traite des exemples.

Partie I : Dimension d'une intersection d'hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Pour $k \in [\![1, p]\!]$ soit $\phi_k \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On suppose que la famille $(\phi_1, \dots, \phi_p)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On la complète en une base $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On pose les applications linéaires :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto & (\phi_1(x), \dots, \phi_p(x)) \end{array}$$

1. Démontrons par l'absurde que Φ est injective. Ainsi, considérons $x \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ tel que $x \neq 0$.
   (a) Justifier qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E avec $e_1 = x$.
   (b) En déduire l'existence de $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $f(x) \neq 0$.
   (c) Aboutir à une contradiction en utilisant le fait que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
2. En déduire que Φ est un isomorphisme.
3. En déduire que Ψ est surjective.
4. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(\phi_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}(\phi_p)) = n - p$.

Partie II : Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit

On fixe un entier $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit. On note $d = \dim(\mathcal{A})$. On suppose que $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 1$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ n'est ni $\{0_n\}$ ni $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Nous allons démontrer que $d \leqslant n^2 - n + 1$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $d > n^2 - n + 1$.
Soit $(A_1, \dots, A_d)$ une base de $\mathcal{A}$.
Pour $k \in [\![1, d]\!]$ on pose

$$\phi_k : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & tr({A_k}^\intercal M) \end{array}$$

On pose également $\mathcal{B} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall A \in \mathcal{A} \ \ \mathrm{tr}(A^\intercal M) = 0\}$ et $\mathcal{C} = \{A^\intercal, A \in \mathcal{A}\}$.

1. (a) Soit $(A, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. En détaillant les calculs à partir des définitions, exprimer $\mathrm{tr}(A^\intercal M)$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$ et $m_{i,j}$ de A et M.
   (b) En déduire que, si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(A^\intercal M) = 0$, alors $A = 0_n$.
2. En déduire que la famille $(\phi_1, \dots, \phi_d)$ est libre.
3. Démontrer que $\mathcal{B} = \mathrm{Ker}(\phi_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}(\phi_d)$. On notera r sa dimension.
4. En déduire en utilisant la première partie la valeur de r puis l'encadrement $1 \leqslant r < n - 1$.
5. Démontrer que $(A_1^\intercal, \dots, A_d^\intercal)$ est une base de $\mathcal{C}$; en déduire sa dimension.
6. Démontrer que $\forall C \in \mathcal{C}, \forall B \in \mathcal{B}, CB \in \mathcal{B}$.
7. Soit $(B_1, \dots, B_r)$ une base de $\mathcal{B}$. Justifier l'existence d'une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $B_1 X \neq 0_{n,1}$.
8. Soit $F = \mathrm{Vect}(B_1 X, \dots, B_r X) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Démontrer que $\forall C \in \mathcal{C}, \forall Y \in F, CY \in F$.
9. Soit $s = \dim(F)$. Justifier que $s \geqslant 1$.
10. Considérons une base $(Y_1, \dots, Y_s)$ de F que l'on complète pour obtenir une base $(Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \underbrace{F \times \dots \times F}_{\text{s fois}} \times \underbrace{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}_{\text{n-s fois}} \\ C & \longmapsto & (CY_1, \dots, CY_n) \end{array}$$

   (a) Justifier que l'espace d'arrivée est cohérent.
   (b) Démontrer que f est linéaire.
   (c) Montrer que f est injective
   (d) En appliquant le théorème du rang, en déduire que $\dim(\mathcal{C}) \leqslant s^2 - ns + n^2$.
   (e) Démontrer que $s < n - 1$.
   (f) Aboutir à une contradiction.

Partie III : Des exemples

1. Soit $F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0\}$.
   (a) Donner sans justification une base et la dimension de F.
   (b) Démontrer par la définition du produit matriciel que F est stable par produit.
2. Déterminer un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ différent de $\{0_n\}$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit.
3. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit. Que dire de n ? Donner un exemple.