MPSI 832

2024-2025

Devoir surveillé 10

On soignera la rédaction et on sera rigoureux et précis dans les raisonnements.Bien lire le sujet il y a des questions indépendantes. Dans le cas d'utilisation d'abréviations merci de les définir en 1ère page.(pas plus de 5) Je ne lis pas le crayon à papier les résultats doivent être soulignés.

La machine est interdite +1 point si votre rédaction est soignée, votre copie n'est pas sale et que la rédaction est correcte, -1 dans le cas contraire

Analyse

Ici a est un réel strictement positif et f est une application définie sur $[0, a]$, à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$ et s'annulant en 0.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, a]$ dans un ensemble à déterminer. On note g la bijection réciproque. On précisera sa monotonie, sa régularité (Continuité ? dérivabilité ?)
2. Montrer que $\forall \alpha \in [0, a]$:
$$\int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \alpha f(\alpha)$$
(On pourra étudier une fonction en étant soigneux sur les domaines de définition et de dérivation)
3. Une application du résultat précédent
   (a) Montrer que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. En déduire $\tan\frac{3\pi}{8}$.
   (b) i. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{x^2}{1+x^4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \dfrac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\right)$
   ii. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}dx$. On notera I le réel $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}dx$
   iii. En déduire la valeur de I (On simplifiera la somme des 2 arctangentes.)
   (c) Dans cette question f désigne la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$
   i. Montrer que f vérifie les hypothèses de 1.
   ii. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(y^2)dy$
   iii. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

Des morceaux de sujets de concours

Les parties sont indépendantes

1. On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_k + b_j \neq 0$ pour tout $(k, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$ Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :
$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}.$$

(a) Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k}$, alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1\le i<j<\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}(a_i+b_j)}.$$

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et soit $(U,V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$.
   (a) Que dire du rang de UV^T ? .
   On remarquera pour la suite que $U^T V \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et on confondra cette matrice avec le réel qu'elle contient.
   (b) Calculer le produit matriciel par blocs

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ V^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n + UV^T & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -V^T & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) En déduire que $\det(I_n + UV^T) = 1 + V^T U$
   (d) Montrer plus généralement que $\det(A+UV^T) = \det(A)\det(I_n + V^T A^{-1} U)$
   (e) Montrer que $A+UV^T$ est inversible si et seulement si $V^T A^{-1} U \neq -1$
   (f) On suppose que $A+UV^T$ est inversible. Montrer que :

$$(A+UV^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}UV^TA^{-1}}{1+V^TA^{-1}U}$$

   (g) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(C) = 0$ A-t-on toujours $\det(C+UV^T) = 0$?

Hamilton-Cayley et applications

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ On note $I = [\![1, n]\!]$

On rappelle que $A^0 = I_n$ et que pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n$.

Dans toute la suite on confondra polynôme et fonction polynomiale.

On "rappelle" que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors le polynôme caractéristique noté χ_A est $x \longmapsto det(xI_n - A)$.

On rappelle que $\alpha \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AX = \alpha X$

On va essayer de démontrer les théorèmes

- ⋆ **Théorème de Cayley- Hamilton**

  Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_A$ annule A c'est à dire $\chi_A(A) = 0$

  Attention on ne peut pas remplacer x par A directement !

- ⋆ **Matrices nilpotente**

  Une matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi $\forall k \in I, Tr(A^k) = 0$

1. Vérifier le théorème de Cayley-Hamilton sur $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

   On revient au cas général.

2. (a) Soit $M_0, M_1, \ldots, M_n$ $n+1$ matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall x \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{n} x^k M_k = 0_n$.

   Montrer que $M_0 = M_1 = ... = M_n = 0_n$

   (b) Montrer que χ_A est unitaire de degré n.

3. Maintenant on pose $\forall x \in \mathbb{C}, \chi_A(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ et $\forall x \in \mathbb{C}, C(x) = (com(xI_n - A))^T$

   (a) Montrer que $\forall (i,j) \in I^2 x \longmapsto c_{i,j}(x)$ est une fonction polynomiale de degré $\leqslant n-1$.

   (b) En déduire l'existence de matrices $C_0, \ldots C_{n-1}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall x \in \mathbb{C}, C(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k C_k$

   (c) Montrer que $\begin{cases} p_0 I_n = -C_0 A \\ p_n I_n = C_{n-1} \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ p_k I_n = C_{k-1} - C_k A \end{cases}$

   (d) Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \sum_{i=0}^{n-1-k} p_{i+k+1} A^i = C_k$

   (e) En déduire le théorème d'Hamilton Cayley

4. (a) Soient $f_1 \ldots f_n$ n fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ Calculer la dérivée de $f_1 f_2 \ldots f_n$.

   (b) Soit $M : \mathbb{R} \longmapsto \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction. On suppose que $\forall (i,j) \in I^2$ la fonction $x \longmapsto m_{i,j}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $M_1, \ldots, M_n$ les colonnes de M et $M_1', \ldots, M_n'$ leurs dérivées composantes par composantes.On pose enfin : $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(x) = det(M(x))$

   Montrer que Δ est dérivable sur $\mathbb{R}$

   et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta'(x) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(M_1(x), \ldots, M_{k-1}(x), M_k'(x), M_{k+1}(x), \ldots, M_n(x))$

   (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, {\chi_A}'(x) = Tr(C(x))$

   (d) En déduire que $\forall k \in [\![0, n-1]\!] : Tr(C_k) = (k+1)p_{k+1}$

   (e) Montrer que $p_{n-1} = -Tr(A)$

5. On suppose ici que $\forall k \in I, Tr(A^k) = 0$

   (a) Montrer que $\chi_A = X^n + p_0$

   (b) En déduire que A est nilpotente.

6. On suppose dans cette question que A est nilpotente

   (a) Montrer que 0 est la seule valeur propre de A

   (b) En déduire χ_A puis montrer que $Tr(A) = 0$

   (c) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, Tr(A^k) = 0$